

Algunas representaciones simples de la función hipergeométrica generalizada

$${}_2R_1(a, b; c; \tau; x)$$

Jaime A. Castillo Pérez¹ y Carlos Jiménez Ruiz²

Recepción: 4 de julio de 2006 — Aceptación: 26 de septiembre de 2006

Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

El campo de las funciones especiales ha tenido un gran desarrollo en las últimas décadas dado que son muchos los fenómenos que se pueden estudiar mediante el uso de las mismas como, por ejemplo, procesos estocásticos relacionados, investigación de operaciones, teoría cuántica, ecuaciones funcionales, vibración de placas, conducción del calor, elasticidad, y radiación. En este trabajo se considera una ampliación de las teorías presentadas por M. Dotsenko en 1991, quien introdujo la generalización de la función hipergeométrica de Gauss, denotada por ${}_2R_1^-(z)$, y estableció su representación en serie e integral. Es importante notar que en 1999 Nina Virchenko y luego, en el 2003, Leda Galué consideraron esta función, introduciendo un conjunto de fórmulas de recurrencia y de diferenciación. En este trabajo se establecen algunas representaciones simples para la función ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$, las cuales serán muy útiles en futuras investigaciones puesto que permiten simplificar cálculos en el momento de solucionar problemas que involucren esta función.

Palabras claves: función hipergeométrica generalizada, representaciones simples.

¹ M. Sc. en Matemática Aplicada, jacas68@yahoo.es, director del grupo de investigación GIMA, Universidad de la Guajira

² Especialista en Computación para la Docencia, carlosj114@latinmail.com, miembro del grupo de investigación GIMA, Universidad de la Guajira.

Abstract

The field of especial functions have had a remarkable development during the last deacades because there are many phenomena that can be studied through ont the use of these functions themselves, such as related stochastics processes, operational research, queuing theory, functional equations, vibrations of plates, heat conduction, elasticity, and radiation. Along this paper work, an extension of the theories presented by M. Dotsenko en 1991 is considered. M. Dotsenko introduced the generalization of the hypergeometric function of Gauss referred as ${}_2R_1^\tau(z)$, and he established it representation in series and integral. It is important to remark that in 1999 Nina Virchenko and, later in 2003, Leda Galué considered this function by introducing a set of recurrence and differentiation formulas. Along this paper work some simple representations of the function ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$ are displayed, which will be very useful for future researchers since they permit simplify calculus at the time of solving problems involving this function.

Key words: generalized hypergeometric function, simple representations.

1 Introducción

El estudio de las funciones especiales ha apoyado de gran forma el desarrollo de las matemáticas aplicadas. Entre ellas se tienen: la función hipergeométrica de Gauss, la función hipergeométrica generalizada, la función hipergeométrica de Wright, las funciones de Appell, la función G, la función H y las funciones de Humbert; ver por ejemplo [1], [2], [3], [4], [5] y [6].

Las funciones hipergeométricas aparecen en una diversidad de aplicaciones tales como: estadísticas, investigación de operaciones, teoría cuántica, ecuaciones funcionales, vibración de placas, conducción del calor, elasticidad y radiación; ver por ejemplo [1], [7] y [8].

En 1991, M. Dotsenko [9] consideró una generalización de la función hipergeométrica de Gauss denotada por

$${}_2R_1^\tau(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)} \frac{z^k}{k!},$$

estableciendo además su representación en serie como también su representación integral. En 1999 Nina Virchenko [10] estableció algunas fórmulas de

diferenciación y relaciones de recurrencia para la función ${}_2R_1^T(z)$, las cuales fueron ampliadas en el 2003 por Leda Galué y colaboradores [7], quienes dedujeron seis nuevas relaciones de recurrencia para esta función.

En este trabajo se presentan algunas representaciones simples para la función ${}_2R_1^T(z)$. Antes se hará un breve recorrido por la función hipergeométrica de Gauss, dado que la función ${}_2R_1^T(z)$ es una generalización de ésta.

1.1 La ecuación hipergeométrica

Aquí se hará un breve paso por la ecuación diferencial hipergeométrica, considerando algunas de sus soluciones tales como la función hipergeométrica de Gauss y algunas funciones hipergeométricas confluentes, también se presentan algunas aplicaciones importantes asociadas a tales soluciones.

La ecuación diferencial lineal dada por [8, pág. 162]

$$z(1-z)u'' + [c - (a+b+1)z]u' - abu = 0, \quad (1)$$

donde z es una variable compleja y a, b, c son parámetros reales o complejos. La ecuación (1) se conoce como la ecuación hipergeométrica y contiene como casos especiales muchas ecuaciones diferenciales encontradas en las aplicaciones.

En la región $|z| < 1$, una solución particular de (1) es

$$u_1(z) = {}_2F_1(a, b; c; z), \quad (2)$$

donde ${}_2F_1(a, b; c; z)$ es la función hipergeométrica de Gauss definida como

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (3)$$

donde $c \neq 0, -1, -2, \dots$ y $(a)_k$ es el símbolo de Pochhammer definido por [11, pág. 758]

$$(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

Además, $\Gamma(a)$ es la función Gamma definida como [11, pág. 759]

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(a) > 0.$$

De otro lado, la función (2) tiene la representación integral de tipo Euler [7, pág. 240]

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \quad (4)$$

$$\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0; \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

La función hipergeométrica confluyente se puede obtener a partir de la función hipergeométrica de Gauss, haciendo $x = bz$ y usando la expresión en factores del símbolo de Pochhammer y luego haciendo tender b hacia infinito [12, págs. 41, 42]. Esto es

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k b^k \left(1 + \frac{1}{b}\right) \cdots \left(1 + \frac{k-1}{b}\right) \frac{x^k}{k!}}{(c)_k b^k};$$

al hacer tender b hacia el infinito se obtiene la serie

$${}_1F_1(a; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}. \quad (5)$$

Note que al hacer $x = bz$ en (1) resulta la ecuación diferencial

$$xu'' + (c-x)u' - au = 0, \quad (6)$$

que se conoce como ecuación hipergeométrica confluyente. La serie (5) es una solución particular de (6). Otra solución para (6) está dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+a-c)_k}{(2-c)_k} \frac{x^{k+1-c}}{k!} = x^{1-c} {}_1F_1(1+a-c; 2-c; x).$$

Por lo tanto, la solución general de (6) es

$$u(x) = A {}_1F_1(a; c; x) + B x^{1-c} {}_1F_1(1+a-c; 2-c; x); \quad (7)$$

a partir de (7) se deduce la función hipergeométrica confluyente de Tricomi, presentada de la forma [11, pág. 799]

$$\Psi(a, c; x) = \Gamma\left[\begin{matrix} 1-c \\ 1+a-c \end{matrix}\right] {}_1F_1(a; c; x) + \Gamma\left[\begin{matrix} c-1 \\ a \end{matrix}\right] x^{1-c} {}_1F_1(1+a-c; 2-c; x); \quad (8)$$

y por último, entre otras, se presenta la función hipergeométrica confluyente de Whittaker expresada en términos de la función de Tricomi de la forma [11, pág. 797]

$$W_{\chi, \mu}(x) = x^{\mu+1/2} e^{-x/2} \Psi\left(\mu - \chi + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; x\right), \quad (9)$$

los parámetros χ , μ dependen de a y c de la manera $\chi = \frac{c}{2} - a$, $2\mu = c - 1$.

Observe que un gran número de funciones elementales pueden ser expresadas en términos de las funciones hipergeométricas y funciones hipergeométricas confluentes, entre otras se tienen las siguientes

$${}_2F_1(1, b; b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad |z| < 1,$$

que es la bien conocida serie geométrica, esto es, la serie hipergeométrica es una generalización de la serie geométrica.

Otros casos especiales se presentan a continuación:

1. ${}_2F_1(-a, 1; 1; -z) = (1 + z)^a$
2. ${}_2F_1(1, 1; 2; -z) = \ln(1 + z) / z$
3. ${}_2F_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \sin^2 z) = \cos z$
4. ${}_2F_1(\frac{1}{2}, 1; 1; \sin^2 z) = \sec z$
5. ${}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2) = \frac{\sin^{-1} z}{z}$
6. ${}_2F_1(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2) = \frac{\tan^{-1} x}{x}$
7. ${}_2F_1(1, a; a; z) = \frac{1}{1-z}$
8. ${}_1F_1(a; a; z) = e^z$.

Esto por mencionar algunos casos importantes.

A continuación se presenta un ejemplo sencillo, tomado de [12], para ilustrar una aplicación de la función hipergeométrica de Gauss.

Ejemplo 1.1 (El péndulo simple). *Un péndulo simple consiste de un cuerpo de masa m atado a una cuerda sin masa de longitud l . El otro extremo de la cuerda está fijo en un punto de tal manera que el sistema puede moverse bajo la acción de la gravedad como se muestra en la figura (1).*

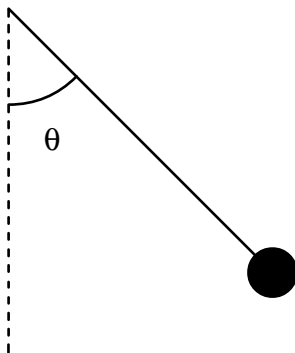


Figura 1: Péndulo simple

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son la tensión T de la cuerda y el peso mg . Aplicando la segunda ley de Newton en dos dimensiones se tiene:

- Centripeta: $T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{l}$
- Tangencial: $-mg \sin \theta = m \frac{d^2}{dt^2} (l\theta)$

Considerando la ecuación tangencial y reorganizándola se obtiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0; \quad (10)$$

para amplitudes pequeñas, el cuerpo describe un movimiento armónico simple y se deduce fácilmente que el periodo de oscilación es $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Para obtener una solución exacta de (10), se multiplica por $\frac{d\theta}{dt}$, esto es,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{g}{l} \cos \theta \right] = 0,$$

lo cual indica que la cantidad entre corchetes es constante dado que se satisface el teorema de conservación de la energía. Si se supone que el péndulo se

desplaza de θ a θ_0 ,

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} (\cos \theta - \cos \theta_0);$$

usando la identidad $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ y haciendo un reordenamiento de la ecuación se obtiene

$$2\sqrt{\frac{g}{l}} \int dt = \int \frac{d\theta}{[k^2 - \sin^2(\theta/2)]^{1/2}}$$

en la integral, $k = \sin(\theta_0/2)$. Considerando $\theta \leq \theta_0$ se puede hacer el cambio de variables $\sin \phi = k^{-1} \sin(\theta/2)$ para obtener

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \int dt = \int \frac{d\phi}{[1 - k^2 \sin^2 \phi]^{1/2}};$$

la integral de la derecha es una integral elíptica de primera especie denotada por

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi'}{[1 - k^2 \sin^2 \phi']^{1/2}}.$$

El tiempo necesario para que el ángulo cambie de 0 a θ_0 es un cuarto del periodo T . En este tiempo ϕ va de 0 a $\pi/2$, con estos límites se tiene la integral

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{[1 - k^2 \sin^2 \phi]^{1/2}},$$

ésta es una integral elíptica completa de primera especie. El integrando tiene la expansión

$$[1 - k^2 \sin^2 \phi]^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} k^{2n} \sin^{2n} \phi,$$

ver (3) caso especial 1, luego

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} k^{2n} \sin^{2n} \phi d\phi;$$

como la serie converge uniformemente, se puede intercambiar el símbolo de la suma con la integral de la siguiente manera

$$F(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} k^{2n} \sin^{2n} \phi, \quad (10)$$

que resolviendo al final se obtiene

$$F(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{n! (1)_n} k^{2n} = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right).$$

Entonces el periodo de oscilación de un péndulo simple está dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right).$$

Observe que para oscilaciones pequeñas esto es $\theta_0 \ll 1$ de acuerdo con (4)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

1.2 La función ${}_2R_1^T(z)$

En 1999 N. Virchenco [10] consideró una generalización de la serie hipergeométrica de Gauss de la forma

$${}_2R_1^T(z) = {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)} \frac{z^k}{k!}, \quad (11)$$

donde a, b, c son números complejos, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$, $|z| < 1$.

Si $\tau = 1$ en (11),

$${}_2R_1(a, b; c; 1; z) = {}_2F_1(a, b; c; z).$$

Esta función tiene la representación integral de tipo Euler

$${}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt^\tau)^{-a} dt \quad (12)$$

$$\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

Las ecuaciones (11) y (12) son las representaciones en serie e integral introducidas por M. Dotsenko en 1992.

En el 2004 Castillo y Bertel [13] establecieron una representación de la función ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times \\ &{}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau}+1; z\right). \end{aligned} \quad (13)$$

$$\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

1.3 Algunas representaciones simples de la función ${}_2F_1(a, b; c; z)$

A continuación se presentan algunas representaciones simples para la función hipergeométrica de Gauss, las cuales son muy útiles para obtener diversos resultados simbólicos usados para desarrollar las representaciones simples para la función hipergeométrica generalizada. Además de constituirse en casos particulares para las mismas [11, pág. 454], posteriormente se muestra un resultado que requiere de la aplicación de este tipo de representaciones para tener una expresión fácil de manipular.

1. ${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right)$
2. ${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z), \quad |\arg(1-z)| < \pi$
3. ${}_2F_1(a, b; c; z) = \Gamma\left[\begin{matrix} c, b-a \\ b, c-a \end{matrix}\right] (-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, 1-c+a; 1-b+a; \frac{1}{z}\right) +$
 $\Gamma\left[\begin{matrix} c, a-b \\ a, c-b \end{matrix}\right] (-z)^{-b} {}_2F_1\left(b, 1-c+b; 1-a+b; \frac{1}{z}\right), \quad |\arg(-z)| < \pi$

4. ${}_2F_1(a, b; c; z) = \Gamma \left[\begin{matrix} c, b-a \\ b, c-a \end{matrix} \right] (1-z)^{-a} {}_2F_1 \left(a, c-b; a-b+1; \frac{1}{1-z} \right) +$
 $\Gamma \left[\begin{matrix} c, a-b \\ a, c-b \end{matrix} \right] (1-z)^{-b} {}_2F_1 \left(b, c-a; b-a+1; \frac{1}{1-z} \right), \quad |\arg (1-z)| < \pi$
5. ${}_2F_1(a, b; c; z) = \Gamma \left[\begin{matrix} c, c-a-b \\ c-a, c-b \end{matrix} \right] z^{-a} {}_2F_1 \left(a, 1+a-c; a+b-c+1; 1-\frac{1}{z} \right) +$
 $\Gamma \left[\begin{matrix} c, a+b-c \\ a, b \end{matrix} \right] z^{a-c} (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1 \left(c-a, 1-a; 1+c-a-b; 1-\frac{1}{z} \right)$
 $|\arg (1-z)|, |\arg z| < \pi$
6. ${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{(1-c)_m}{(1+a-c)_m} z^{-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (z-1)^{m-k} {}_2F_1(a, b-k; c-m; z)$
 $\operatorname{Re}(c-a) > m$
7. ${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{(1-c)_m}{(1-a)_m} z^{-m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} {}_2F_1(a-m, b-k; c-m; z)$
 $\operatorname{Re}(a) > m$
8. ${}_2F_1(a, b; c; z) = [c-2a-(b-c)z]^{-1} [a(z-1) {}_2F_1(a+1, b; c; z) +$
 $(c-a) {}_2F_1(a-1, b; c; z)]$
9. ${}_2F_1(a, b; c; z) = (a-b)^{-1} [a {}_2F_1(a+1, b; c; z) - b {}_2F_1(a, b+1; c; z)]$
10. ${}_2F_1(a, b; c; z) = (c-a-b)^{-1} [a(z-1) {}_2F_1(a+1, b; c; z) +$
 $(c-b) {}_2F_1(a, b-1; c; z)]$
11. ${}_2F_1(a, b; c; z) = [a-(c-b)z]^{-1} [a(1-z) {}_2F_1(a+1, b; c; z) - zc^{-1}(c-a) \times$
 $(c-b) {}_2F_1(a, b; c+1; z)]$
12. ${}_2F_1(a, b; c; z) = (1+a-c)^{-1} [a {}_2F_1(a+1, b; c; z) - (c-1) {}_2F_1(a, b; c-1; z)]$
13. ${}_2F_1(a, b; c; z) = [(b-a)(1-z)]^{-1} [(c-a) {}_2F_1(a-1, b; c; z) +$
 $(b-c) {}_2F_1(a, b-1; c; z)]$
14. ${}_2F_1(a, b; c; z) = [c(1-z)]^{-1} [c {}_2F_1(a-1, b; c; z) + (b-c)z {}_2F_1(a, b; c+1; z)]$
15. ${}_2F_1(a, b; c; z) = [a-1-(c-b-1)z]^{-1} [(a-c) {}_2F_1(a-1, b; c; z) +$
 $(c-1)(1-z) {}_2F_1(a, b; c-1; z)]$
16. ${}_2F_1(a, b; c; z) = [c-1-(2c-a-b-1)z]^{-1} [(c-1)(1-z) \times$
 ${}_2F_1(a, b; c-1; z) - c^{-1}(c-a)(c-b)z {}_2F_1(a, b; c+1; z)]$
17. ${}_2F_1(a, b; b; z) = (1-z)^{-a}.$

En muchas oportunidades se usa la siguiente notación para simplificar la escritura

$$\Gamma \left[\begin{matrix} c, c-a-b \\ c-a, c-b \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}.$$

Ejemplo 1.2. *El siguiente resultado muestra la utilidad de las representaciones simples de la función hipergeométrica de Gauss en el cálculo de algunas integrales impropias. Con su uso, es posible obtener formas computables para algunas integrales.*

En [11, pág. 318] se tiene el resultado

$$\int_0^{\infty} x^{c-1} e^{-px} {}_2F_1(a, b; c; -wx) dx = \frac{\Gamma(c)}{p^c} \left(\frac{p}{w}\right)^{\frac{(a+b-1)}{2}} e^{\frac{p}{2w}} W_{\frac{(1-a-b)}{2}, \frac{(a-b)}{2}} \left(\frac{p}{w}\right),$$

$$\operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(p) > 0; \quad |\arg w| < \pi$$

y W es la función hipergeométrica confluyente de *Wittaker*.

En adelante, se desarrolla un procedimiento simbólico que permite verificar dicho resultado.

En efecto, sea $I = \int_0^{\infty} x^{c-1} e^{-px} {}_2F_1(a, b; c; -wx) dx$. Haciendo uso de la representación (4), de la sección (1.3), y separando las integrales se obtiene

$$I = \Gamma \left[\begin{matrix} c, b-a \\ b, c-a \end{matrix} \right] (w)^{-a} \int_0^{\infty} x^{c-a-1} e^{-px} {}_2F_1 \left(a, 1-c+a; 1-b+a; -\frac{1}{wx} \right) dx +$$

$$\Gamma \left[\begin{matrix} c, a-b \\ a, c-b \end{matrix} \right] (w)^{-b} \int_0^{\infty} x^{c-b-1} e^{-px} {}_2F_1 \left(b, 1-c+b; 1-a+b; -\frac{1}{wx} \right) dx.$$

Considerando

$$I_1 = \Gamma \left[\begin{matrix} c, b-a \\ b, c-a \end{matrix} \right] (w)^{-a} \int_0^{\infty} x^{c-a-1} e^{-px} {}_2F_1 \left(a, 1-c+a; 1-b+a; -\frac{1}{wx} \right) dx,$$

usando la representación en serie dada en (3) se obtiene

$$I_1 = \Gamma \left[\begin{matrix} c, b-a \\ b, c-a \end{matrix} \right] (w)^{-a} \int_0^{\infty} x^{c-a-1} e^{-px} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (1-c+a)_k \left(-\frac{1}{wx}\right)^k}{(1-b+a)_k k!} dx.$$

La serie converge uniformemente, por tanto se puede intercambiar la suma con la integral. Luego

$$I_1 = \Gamma \left[\begin{matrix} c, b-a \\ b, c-a \end{matrix} \right] (w)^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (1-c+a)_k \left(-\frac{1}{w}\right)^k}{(1-b+a)_k k!} \int_0^{\infty} x^{c-a-k-1} e^{-px} dx,$$

la integral es una función Gamma completa, por lo tanto se obtiene

$$I_1 = \Gamma \left[\begin{matrix} c, b-a \\ b, c-a \end{matrix} \right] \frac{\left(\frac{p}{w}\right)^a}{p^c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (1-c+a)_k \left(-\frac{p}{w}\right)^k}{(1-b+a)_k k!} \Gamma(c-a-k).$$

En [11, pág. 758] se tiene el resultado

$$\Gamma(a-k) = \frac{(-1)^k \Gamma(a)}{(1-a)_k},$$

haciendo uso de este resultado se obtiene

$$I_1 = \Gamma \left[\begin{matrix} c, b-a \\ b, c-a \end{matrix} \right] \frac{\left(\frac{p}{w}\right)^a}{p^c} \Gamma(c-a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(1-b+a)_k} \frac{\left(\frac{p}{w}\right)^k}{k!},$$

y de aquí

$$I_1 = \Gamma \left[\begin{matrix} c, b-a \\ b \end{matrix} \right] \frac{\left(\frac{p}{w}\right)^a}{p^c} {}_1F_1 \left(a, 1-b+a; \frac{p}{w} \right).$$

Con un procedimiento similar se obtiene

$$I_2 = \Gamma \left[\begin{matrix} c, a-b \\ a \end{matrix} \right] \frac{\left(\frac{p}{w}\right)^b}{p^c} {}_1F_1 \left(b, 1-a+b; \frac{p}{w} \right),$$

donde $I = I_1 + I_2$, luego

$$I = \Gamma \left[\begin{matrix} c, b-a \\ b \end{matrix} \right] \frac{\left(\frac{p}{w}\right)^a}{p^c} {}_1F_1 \left(a, 1-b+a; \frac{p}{w} \right) + \\ \Gamma \left[\begin{matrix} c, a-b \\ a \end{matrix} \right] \frac{\left(\frac{p}{w}\right)^b}{p^c} {}_1F_1 \left(b, 1-a+b; \frac{p}{w} \right).$$

Ahora

$$I = \frac{\Gamma(c) \left(\frac{p}{w}\right)^a}{p^c} \left[\Gamma \left[\begin{matrix} b-a \\ b \end{matrix} \right] {}_1F_1 \left(a, 1-b+a; \frac{p}{w} \right) + \right. \\ \left. \Gamma \left[\begin{matrix} a-b \\ a \end{matrix} \right] \left(\frac{p}{w}\right)^{b-a} \times {}_1F_1 \left(b, 1-a+b; \frac{p}{w} \right) \right]$$

y de acuerdo con (8) y (9) se obtiene finalmente

$$\int_0^{\infty} x^{c-1} e^{-px} {}_2F_1(a, b; c; -wx) dx = \frac{\Gamma(c)}{p^c} \left(\frac{p}{w}\right)^{\frac{(a+b-1)}{2}} e^{\frac{p}{2w}} W_{\frac{(1-a-b)}{2}, \frac{(a-b)}{2}}\left(\frac{p}{w}\right)$$

$$\operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(p) > 0; \quad |\arg w| < \pi.$$

Es importante resaltar que la anterior integral es semejante a la generalización de la función Gamma introducida por Al-Musallan y Kalla [14], definida así

$$D\left(\begin{matrix} a, b; c; p \\ u, v \end{matrix}\right) = v^{-a} \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-px} {}_2F_1\left(a, b; c; -\frac{x}{v}\right) dx, \quad |\arg v| < \pi,$$

donde a, b , y c son parámetros complejos con $c \neq 0$, $\operatorname{Re}(p) > 0$, $\operatorname{Re}(u) > 0$.

Para la cual también es posible tener una forma computable, haciendo uso de las mencionadas representaciones simples.

2 Resultados

2.1 Algunas representaciones de la función ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$

A continuación se presentan algunas representaciones simples de la función ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$. En cada caso se ha empleado el resultado (14); las expresiones (1)–(17) permiten que los cálculos sean casi inmediatos, lo que facilita, en el desarrollo simbólico, la obtención de dichos resultados. Al final se presenta el cálculo de una integral impropia que requiere de la aplicación del resultado (4) obtenido en el presente trabajo, para mostrar una aplicación de los resultados obtenidos.

Representación 1

De acuerdo con (13)

$${}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\tau \Gamma(b) \Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau} + 1\right)} \times$$

$${}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right),$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0;$$

usando el resultado (1), de la sección (1.3), se obtiene

$$\begin{aligned} {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau} + 1\right)} \times \\ &\quad (1-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, 1; \frac{k+b}{\tau} + 1; -\frac{z}{1-z}\right), \end{aligned}$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

De donde

$$\begin{aligned} {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) &= \frac{\Gamma(c)(1-z)^{-a}}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau} + 1\right)} \times \\ &\quad {}_2F_1\left(a, 1; \frac{k+b}{\tau} + 1; -\frac{z}{1-z}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

Similarmenete se obtuvieron los resultados:

$$\begin{aligned} 2. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) &= \frac{\Gamma(c)(1-z)^{1-a}}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau} + 1\right)} \times \\ &\quad {}_2F_1\left(\frac{k+b}{\tau} + 1 - a, 1; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right) \end{aligned}$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

$$\begin{aligned} 3. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \times \\ &\quad \left[B\left(\frac{k+b}{\tau}, 1-a\right) {}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; a; 1-z\right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{(1-z)^{1-a}}{a-1} {}_2F_1\left(\frac{k+b}{\tau} + 1 - a, 1; 2-a; 1-z\right) \right] \end{aligned}$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

$$4. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \times \\ \left[\beta \left(\frac{k+b}{\tau} - a, 1 \right) (-z)^{-a} {}_2F_1 \left(a, a - \frac{k+b}{\tau}; 1 + a - \frac{k+b}{\tau}; \frac{1}{z} \right) + \right. \\ \left. \beta \left(\frac{k+b}{\tau}, -\frac{k+b}{\tau} + a \right) (-z)^{-\frac{k+b}{\tau}} \right]$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0, |\arg(-z)| < \pi.$$

$$5. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \times \\ \left[\beta \left(\frac{k+b}{\tau} - a, 1 \right) (1-z)^{-a} {}_2F_1 \left(a, 1; 1 + a - \frac{k+b}{\tau}; \frac{1}{1-z} \right) + (1-z)^{-\frac{k+b}{\tau}} \times \right. \\ \left. \beta \left(a - \frac{k+b}{\tau}, \frac{k+b}{\tau} \right) {}_2F_1 \left(\frac{k+b}{\tau}, \frac{k+b}{\tau} + 1 - a; 1 - a + \frac{k+b}{\tau}; \frac{1}{1-z} \right) \right]$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0, |\arg(-z)| < \pi.$$

$$6. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \times \\ \left[\beta \left(\frac{k+b}{\tau}, 1 - a \right) z^{-a} {}_2F_1 \left(a, a - \frac{k+b}{\tau}; a; 1 - \frac{1}{z} \right) + \right. \\ \left. \frac{z^{a - \frac{k+b}{\tau} - 1}}{(a-1)} (1-z)^{1-a} {}_2F_1 \left(\frac{k+b}{\tau} + 1 - a, 1 - a; 2 - a; 1 - \frac{1}{z} \right) \right]$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0, |\arg(1-z)|, |\arg z| < \pi.$$

$$7. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times \\ \left[\frac{\left(-\frac{k+b}{\tau}\right)_m}{\left(a - \frac{k+b}{\tau}\right)_m} z^{-m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (z-1)^{m-j} \times {}_2F_1 \left(a, \frac{k+b}{\tau} - j; \frac{k+b}{\tau} + 1 - m; z \right) \right]$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0, \operatorname{Re}\left(\frac{k+b}{\tau} + 1 - a\right) > m.$$

$$8. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times \\ \left[\frac{\left(-\frac{k+b}{\tau}\right)_m}{(1-a)_m} z^{-m} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \times \right. \\ \left. {}_2F_1 \left(a - m, \frac{k+b}{\tau} - j; \frac{k+b}{\tau} + 1 - m; z \right) \right]$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0, \operatorname{Re}(a) > m.$$

$$9. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times \\ \left[\left(\frac{k+b}{\tau} + 1 - 2a + z\right)^{-1} \left(a(z-1) {}_2F_1\left(a+1, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right) + \right. \\ \left. \left(\frac{k+b}{\tau} + 1 - a\right) {}_2F_1\left(a-1, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right) \right]$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

$$10. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times \\ \left[\left(a - \frac{k+b}{\tau}\right)^{-1} \left(a {}_2F_1\left(a+1, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right) - \left(\frac{k+b}{\tau}\right) (1-z)^{-a}\right) \right]$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

$$11. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = (1-a)^{-1} a(z-1) {}_2R_1(a+1, b; c; \tau; z) + \\ \frac{\Gamma(c)(1-a)^{-1}}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times {}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau} - 1; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right)$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

$$12. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = (a-z)^{-1} a(1-z) {}_2R_1(a+1, b; c; \tau; z) - \\ \frac{\Gamma(c)(a-z)^{-1}z}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \left(\frac{k+b}{\tau} + 1\right)^{-1} \times \\ \left(\frac{k+b}{\tau} + 1 - a\right) {}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 2; z\right)$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

$$13. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times \\ \left[\left(a - \frac{k+b}{\tau}\right)^{-1} \left(a {}_2F_1\left(a+1, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right) - \left(\frac{k+b}{\tau}\right) (1-z)^{-a}\right) \right]$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

$$14. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times \\ \left[\left(\left(\frac{k+b}{\tau} - a\right) (1-z)\right)^{-1} \left(\left(\frac{k+b}{\tau} + 1 - a\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. {}_2F_1\left(a-1, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right) + {}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau} - 1; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right) \right) \right]$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

$$15. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = (1-z)^{-1} {}_2R_1(a-1, b; c; \tau; z) + \frac{\Gamma(c)z(1-z)^{-1}}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma(\frac{k+b}{\tau})}{\Gamma(\frac{k+b}{\tau}+2)} {}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 2; z\right)$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

$$16. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma(\frac{k+b}{\tau})}{\Gamma(\frac{k+b}{\tau}+1)} \times \left[(a-1)^{-1} \left(\left(a - \frac{k+b}{\tau} - 1 \right) {}_2F_1\left(a-1, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right) + \left(\frac{k+b}{\tau} \right) (1-z)^{1-a} \right) \right]$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

$$17. \quad {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma(\frac{k+b}{\tau})}{\Gamma(\frac{k+b}{\tau}+1)} \times \left[\left(\frac{k+b}{\tau} - \left(\frac{k+b}{\tau} - a + 1 \right) z \right)^{-1} \left(\left(\frac{k+b}{\tau} \right) (1-z)^{1-a} - \left(\frac{k+b}{\tau} + 1 \right)^{-1} \left(\frac{k+b}{\tau} + 1 - a \right) z {}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 2; z\right) \right) \right]$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

Una aplicación de las representaciones simples encontradas

Para armonizar esta aplicación, se presenta una generalización de la integral establecida en el ejemplo (1.2). Lo que se pide es calcular

$$I = \int_0^{\infty} x^{c-1} e^{-px} {}_2R_1(a, b; c; \tau; -wx) dx.$$

En efecto, usando el resultado (4), de la sección (2.1), para ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$ se tiene

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\infty} x^{c-1} e^{-px} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \times \left[\beta \left(\frac{k+b}{\tau} - a, 1 \right) (wx)^{-a} {}_2F_1 \left(a, a - \frac{k+b}{\tau}; 1 + a - \frac{k+b}{\tau}; \frac{1}{z} \right) + \beta \left(\frac{k+b}{\tau}, -\frac{k+b}{\tau} + a \right) (wx)^{-\frac{k+b}{\tau}} \right]$$

$$\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0, \quad |\arg(x)| < \pi;$$

por la convergencia uniforme de la serie, se puede intercambiar la sumatoria con la integral. Luego de separar la integral se obtiene

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \times \left[\beta \left(\frac{k+b}{\tau} - a, 1 \right) w^{-a} \int_0^{\infty} x^{c-a-1} e^{-px} {}_2F_1 \left(a, a - \frac{k+b}{\tau}; a - \frac{k+b}{\tau} + 1; -\frac{1}{wx} \right) dx + \beta \left(\frac{k+b}{\tau}, a - \frac{k+b}{\tau} \right) w^{-\frac{k+b}{\tau}} \int_0^{\infty} x^{c-\frac{k+b}{\tau}-1} e^{-px} dx \right].$$

Procediendo igual que en el ejemplo (1.2), al final se obtiene

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \beta \left(\frac{k+b}{\tau} - a, 1 \right) \left(\frac{p}{w} \right)^a p^{-c} \times {}_2F_2 \left(a, a - \frac{k+b}{\tau}; a - \frac{k+b}{\tau} + 1, 1 + a - c; \frac{p}{w} \right) + \frac{\left(\frac{p}{w} \right)^{b/\tau} p^{-c}}{\Gamma(a)} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \Gamma \left(\frac{k+b}{\tau} \right) \Gamma \left(a - \frac{k+b}{\tau} \right) \Gamma \left(c - \frac{k+b}{\tau} \right) \left[\left(\frac{p}{w} \right)^{1/\tau} \right]^k \right]$$

$$\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0, \quad |\arg(w)| < \pi.$$

Haciendo $\tau = 1$ y después de desarrollar algunas operaciones simbólicas se obtiene el resultado del ejemplo (1.2).

Se destaca el hecho de que la integral calculada es semejante a una nueva generalización de la función gamma estudiada por N. Virchenko, S. Kalla y Al-Zamel [15], definida por

$$D \left(\begin{matrix} a, b; c \\ u, v \end{matrix}; p, \tau \right) = v^{-a} \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-px} {}_2R_1 \left(a, b; c; \tau; -\frac{x}{v} \right) dx, \quad |\arg v| < \pi,$$

donde a , b , c y p son parámetros complejos con $c \neq 0, -1, -2, \dots$, $\tau > 0$, $\operatorname{Re}(p) > 0$, $\operatorname{Re}(u) > 0$. Por lo tanto, haciendo uso de las nuevas representaciones simples para la función ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$ es posible tener formas computables para funciones semejantes a la función gamma generalizada.

3 Conclusiones

De acuerdo con el desarrollo del trabajo es evidente que se pueden obtener representaciones simples para la función hipergeométrica generalizada. Éstos serán útiles para obtener formas computables para funciones que involucren la función ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$. Los cálculos se simplifican cuando se usa (13) puesto que esta ecuación permite utilizar las representaciones simples de la función hipergeométrica de Gauss y tener los nuevos resultados de una manera casi directa.

Referencias

- [1] C. Fox. *The asymptotic expansion of generalized hypergeometric functions*. Proc. London Math. Soc. London, **2**(27), 389–400 (1928).
- [2] J. B. Slater. *Generalized hypergeometric functions*. University Press, Cambridge, 1966.
- [3] H. M. Srivastava and P. W. Karlsson. *Multiple gaussian hypergeometric series*. John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [4] H. M. Srivastava, K. C. Gupta and S. P. Goyal. *The H-functions of one and two variables*. South Asian Publishers, New Delhi, 1982.
- [5] E. M. Wright. *The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function*. J. London Math. Soc. **10**, 286–293, 1935.
- [6] E. M. Wright. *The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function*. Proc. London Math. Soc. **2**(46), 389–408 (1940).
- [7] L. Galué, A. Al-Zamel and S. L. Kalla. *Further results on generalized hypergeometric functions*. Applied Mathematics and Computation, **136**, 17–25 (2003).
- [8] N. N. Levedev. *Special functions and their applications* Prentice-Hall Inc., New York, 1965.

- [9] M. Dotsenko. *On some applications of Wright's hypergeometric functions*. C. R. Acad. Bulgare Sci, **44**, 13–16 (1991).
- [10] N. Virchenko. *On some generalizations of the functions of hypergeometric type*. Fractional Calculus and Applied Analysis, **2**(3), 233–244 (1999).
- [11] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov and O. I. Marichev. *Integrals and series*. Gordon and Breach Science Publishers, **3**, New York, 1992.
- [12] J. B. Seaborn. *Hypergeometric functions an their applications*. Springer-Verlag, New york, 1991.
- [13] J. Castillo y R. Bertel. *Algunas integrales indefinidas que contienen a la función hipergeométrica generalizada*. Centro de investigaciones de la Universidad de la Guajira, 2004.
- [14] F. Al-Musallam and S. L. Kalla. *Further results on a generalized gamma function occuring in diffraction theory*. Integral Transform. Espec. Funct, **7**, 175–190 (1998).
- [15] N. Virchenko, S. L. Kalla and A. Al-Zamel. *Some results on a generalized hypergeometric function*. Integral Transforms and Special Function, **12**(1), 89–100 (2001).